

TD 1 — Logique

Du langage courant au langage mathématique

Exercice 1 — Toi, mon amour, mon ami

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des êtres humains. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}^2$, notons $x \heartsuit y$ la propriété « x aime y ».

1. Traduire les énoncés suivants en langage courant.

- | | |
|--|--|
| (a) $\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}, x \heartsuit y$. | (d) $\exists y \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{H}, x \heartsuit y$. |
| (b) $\exists x \in \mathcal{H}, \exists y \in \mathcal{H}, x \heartsuit y$. | (e) $\forall x \in \mathcal{H}, \exists y \in \mathcal{H}, x \heartsuit y$. |
| (c) $\exists x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}, x \heartsuit y$. | (f) $\forall y \in \mathcal{H}, \exists x \in \mathcal{H}, x \heartsuit y$. |

2. Écrire les phrases suivantes sous forme de propositions mathématiques.

- (a) Tout le monde aime tout le monde.
- (b) Personne n'aime personne.
- (c) L'amour n'est pas toujours un sentiment réciproque.
- (d) Deux personnes qui aiment la même personne ne s'aiment jamais.
- (e) Les ami·es de mes ami·es sont mes ami·es.

Exercice 2 — Propriétés de fonctions numériques

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire mathématiquement les phrases suivantes puis leur négation.

- | | |
|---|---|
| 1. La fonction f n'est pas la fonction nulle. | 3. La fonction f admet un minimum en 2. |
| 2. La fonction f ne s'annule jamais. | 4. La fonction f est minorée. |

Premières démonstrations

Implications

Exercice 3 — Les nombres négatifs existent, premier rappel

Soit x un réel. Donner les implications existant entre ces quatre propositions.

- | | | | |
|----------------|--------------|---------------|----------------|
| 1. $x^2 > 4$. | 2. $x > 2$. | 3. $x < -2$. | 4. $ x > 2$. |
|----------------|--------------|---------------|----------------|

Démonstrations de propositions quantifiées

Exercice 4 — Ordre et quantificateurs

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies.

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$. | 4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$. |
| 2. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 > x$. | 5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 > x$. |
| 3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y^2 > x$. | 6. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y^2 > x$. |

Ensembles

Opérations sur les ensembles

Exercice 5 — Des unions et des intersections

Soient les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = [-5; 3]$, $B =]0; 2]$ et $C = \mathbb{Z}$.

Expliciter les ensembles suivants.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| 1. $A \cap B$ | 5. $\overline{A} \cup B$ | 9. $C \cap B$ |
| 2. $A \cup B$ | 6. $A \cup (B \cap C)$ | 10. $\overline{A} \cap \overline{B}$ |
| 3. $A \cap B \cap C$ | 7. $A \setminus B$ | 11. $A \setminus (B \setminus C)$ |
| 4. $A \cap \overline{B}$ | 8. $B \setminus A$ | 12. $C \cap (B \setminus A)$ |

Exercice 6 — Des petits ponts

Soit E un ensemble et soient A , B et C trois parties de E . Simplifier les parties suivantes.

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. $(A \cup (A \cap B)) \cap B$ | 5. $A \setminus (A \cap B)$ |
| 2. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ | 6. $A \setminus (A \cup B)$ |
| 3. $(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \overline{A})$ | 7. $A \setminus (B \setminus A)$ |
| 4. $[(A \cup B) \cap (B \cap C)] \cup (A \cup C)$ | 8. $A \setminus (A \setminus B)$ |

Exercice 7 — Différence symétrique

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E .

On appelle **différence symétrique** de A et B , et on note $A \triangle B$, l'ensemble

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Représenter cette différence symétrique sur un dessin.
2. Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Justifier que $A \triangle B = B \triangle A$.
4. Simplifier les parties $A \triangle \emptyset$ et $A \triangle A$.
5. Que vaut la différence symétrique de A et B dans le cas où A est incluse dans B ?
6. Simplifier l'ensemble $(A \triangle B) \cup (A \triangle \overline{B})$.

Inclusion, ensemble des parties

Exercice 8 — Inclusion et complémentaire

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E telles que $A \subseteq B$.

Montrer que $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Exercice 9 — Les parties d'une partie

Soient A et B deux ensembles.

1. Montrer que si $A \subseteq B$, alors $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
2. La réciproque est-elle vraie?

Raisonnements classiques

Raisonnement par récurrence

Exercice 10 — Somme géométrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons le nombre suivant :

$$S_n = \sum_{k=0}^n 2^k = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n.$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 11 — Croissance exponentielle

Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 5, on a $2^n > n^2$.

Exercice 12 — Étude d'une suite récurrente

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n}. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exercice 13 — Récurrence double

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n + 1$.

Raisonnements par contraposée et par l'absurde

Exercice 14 — Des nombres très petits

Soit x un réel. Montrer l'implication suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \implies x = 0.$$

Exercice 15 — Racine d'un irrationnel

Soit x un nombre irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 16 — Ceci n'est pas un pavé

Posons $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Représenter l'ensemble C graphiquement.
2. Montrer que C ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux ensembles.

Disjonction de cas

Exercice 17 — La plus grande

Démontrer que pour tout réel x , on a l'inégalité suivante : $x \leq |x|$.

Exercice 18 — Les nombres négatifs existent, deuxième rappel

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $x > \frac{2}{x}$

2. $3 + |-2x + 7| < 5x - 4$

Double implication**Exercice 19 — Une jolie caractérisation de l'égalité**

Soit E un ensemble et soient A , B et C trois sous-ensembles de E .

Montrer que $B = C$ si et seulement si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Double inclusion**Exercice 20 — Compréhension, extension !**

Montrer que les deux ensembles suivants sont égaux :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\} \text{ et } B = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Analyse-synthèse**Exercice 21 — Résolution d'une équation simple avec des racines**

Résoudre par analyse-synthèse l'équation suivante, d'inconnue x réelle :

$$\sqrt{x + 7} = 5 - x.$$

Exercice 22 — Une équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1 - x) = 1 + x.$$

Résolution d'équations et d'inéquations**Exercice 23 — Une différence de racines**

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle : $\sqrt{-2x + 4} - \sqrt{x^2 - 3} = 0$.

Exercice 24 — De l'importance des trinômes

Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

1. $x^2 - 12x + 35 \geq 0$

6. $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15} > 0$

2. (a) $x^2 = x$

(b) $x - 1 = \sqrt{x - 1}$

3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$

7. (a) $\frac{4x^2 - 6x - 10}{x^2 + 2x - 15} = 3$

4. $e^x - 12 + 35e^{-x} \leq 0$

(b) $\frac{4x^2 - 6x - 10}{x^2 + 2x - 15} > 3$

5. $\sqrt{2x + 4} - 7x \leq 7$

Exercice 25 — Une équation à paramètre

Soit m un paramètre réel. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x réelle.

$$e^x + me^{-x} - m - 1 = 0.$$